正交曲线坐标系旋度——本源推导（一页纸）

1. 旋度本源定义（所有正交坐标系通用）

物理本质：对局部真实弧长求导，无人工系数

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial l_1} & \dfrac{\partial}{\partial l_2} & \dfrac{\partial}{\partial l_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

- 第一行：局部正交单位向量
- 第二行：对空间真实微元长度求导
- 第三行：向量场原始分量（无修正）

2. 坐标微分与长度微分关系

$$dl_i = h_i \, dq_i$$
$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

3. 代入本源行列式

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \dfrac{1}{h_1} \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{1}{h_2} \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{1}{h_3} \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

4. 提取列公因子，得到教材标准形式

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 & h_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 & h_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

5. 常用坐标系拉梅系数

- 直角坐标 (x, y, z)：　$h_x = 1,\ h_y = 1,\ h_z = 1$
- 柱坐标 (r, θ, z)：　$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_z = 1$
- 球坐标 (r, θ, ϕ)：　$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r \sin\theta$