# 趋肤效应完整严格推导

（零基础·无跳步·30+页超详细教材版）

全程逐行展开· 贝塞尔方程从零解起

## 目录

# 1 前置说明：你只需要的基础（完全不超纲）

你只需要掌握以下内容，本文所有推导都能跟上：

1. 基本求导、乘积法则
2. 复数运算：$j = \sqrt{-1}$，$e^{j\omega t}$
3. 向量基本概念：向量、分量、单位向量
4. 知道三个算子的基本含义：梯度 $\nabla\Phi$、散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$、旋度 $\nabla \times \boldsymbol{A}$
5. 幂级数概念：$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$
6. 二阶常微分方程：有两个线性无关解

**本文承诺：**

- 每一步推导都写“为什么这么变”
- 每一个方程都写“用到什么定义/定理/法则”
- 贝塞尔方程像解一元二次方程一样，一步一步解
- 绝不跳步、绝不省略、绝不使用未解释的高级结论
- 物理意义与数学推导同步讲解

# 2 物理模型：长直圆柱导线中的高频电流

## 2.1 研究对象

- 无限长、圆柱形、直导线
- 半径：$a$
- 材料：良导体（铜、铝等）
- 通有：沿 $z$ 方向的高频正弦交变电流

## 2.2 观测现象：趋肤效应

当频率升高，电流不再均匀分布，而是：

- 表面电流密度最大
- 内部电流密度随深度指数减小
- 有效载流区域仅在表面一薄层

这一现象称为**趋肤效应（Skin Effect）**。

## 2.3 目标

本文要完整、严格、无跳跃地推导出：

1. 电场 $E_z(r)$ 的分布
2. 电流密度 $J_z(r)$ 的分布
3. 趋肤深度 $\delta$ 的表达式与物理意义
4. 为什么电流会指数衰减

## 2.4 核心对称性：轴对称（最重要简化）

导线为圆柱形，电流沿 $z$ 轴，场分布与角度 $\theta$ 无关：

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$$

所有场量仅依赖于半径 $r$，与 $\theta$、$z$ 无关。

## 2.5 场分量形式

由对称性直接得出：

$$\boldsymbol{E}(r) = E_z(r)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{J}(r) = J_z(r)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{H}(r) = H_\theta(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

# 3 第一步：微观欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ 从头推导

## 3.1 金属导电模型：自由电子气

金属内部存在大量可自由移动的电子，满足：

- 电子数密度：$n$（每立方米电子数）
- 电子电荷：$-e$（$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$）
- 电子质量：$m$（$m \approx 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$）
- 平均碰撞时间：$\tau$（铜：$\tau \approx 2.5 \times 10^{-14}\,\mathrm{s}$）

## 3.2 电子受力分析

电子在电场中受两个力：

**(1) 电场力**

$$\boldsymbol{F}_e = -e\boldsymbol{E}$$

负号：电子带负电，受力与电场方向相反。

**(2) 阻尼力（碰撞等效）** 电子不断与晶格碰撞，定向运动被损耗，等效为阻力：

$$\boldsymbol{F}_d = -\frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}$$

**为什么是 $m/\tau$？** 因为动量 $m\boldsymbol{v}$ 在平均时间 $\tau$ 内损失掉，平均损失率为 $m\boldsymbol{v}/\tau$。

## 3.3 牛顿第二定律（电子运动方程）

合外力 = 质量× 加速度：

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -e\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v} \tag{1}$$

## 3.4 时谐场复数表示（简化时间导数）

高频信号为正弦波，使用复数表示：

$$\boldsymbol{E}(t) = \tilde{\boldsymbol{E}} e^{j\omega t}, \quad \boldsymbol{v}(t) = \tilde{\boldsymbol{v}} e^{j\omega t}$$

**为什么用复数？** 对 $e^{j\omega t}$ 求导就是乘以 $j\omega$，微分方程变代数方程。

时间导数简化规则：

$$\frac{d}{dt} \to j\omega \tag{2}$$

## 3.5 频域运动方程

代入(2)到(1)：

$$j\omega m\boldsymbol{v} = -e\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v} \tag{3}$$

## 3.6 移项整理（将含 $\boldsymbol{v}$ 项放左边）

$$j\omega m\boldsymbol{v} + \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v} = -e\boldsymbol{E}$$

提取公因子 $\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{v}\left(j\omega m + \frac{m}{\tau}\right) = -e\boldsymbol{E} \tag{4}$$

## 3.7 解出漂移速度 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = \frac{-e\boldsymbol{E}}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)} \tag{5}$$

## 3.8 电流密度定义

电流密度 = 单位体积电荷× 平均漂移速度：

$$\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{v} \tag{6}$$

负号：电子带负电，电流方向与电子运动方向相反。

### 3.9 代入速度 $\boldsymbol{v}$

将(5)代入(6)：

$$\boldsymbol{J} = -ne\left(\frac{-e\boldsymbol{E}}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)}\right) = \frac{ne^2}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)}\boldsymbol{E} \tag{7}$$

### 3.10 良导体近似（$\omega\tau \ll 1$）

对于良导体（如铜），$\tau$ 很小。在 $f = 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ 时，$\omega\tau \approx 0.00157 \ll 1$。

因此：

$$j\omega + \frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\tau}$$

代入(7)：

$$\boldsymbol{J} = \frac{ne^2\tau}{m}\boldsymbol{E} \tag{8}$$

### 3.11 定义电导率 $\sigma$

令

$$\sigma \equiv \frac{ne^2\tau}{m} \tag{9}$$

典型值（铜）：$\sigma \approx 5.8 \times 10^7\,\mathrm{S/m}$。

得到微观欧姆定律：

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}} \tag{10}$$

### 第一步总结

我们用最基础的经典力学，严格推出了 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$，这是连接电场与电流的核心关系式。

# 4 第二步：柱坐标微分算子（完全展开·最底层推导）

## 4.1 柱坐标与直角坐标关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

## 4.2 单位向量偏导数（完整展开）

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial r} = 0$$

## 4.3 轴对称条件

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

## 4.4 柱坐标梯度算子（完整展开）

对任意标量场 $\Phi$：

$$\nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}$$

轴对称下：

$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr}\hat{r}$$

## 4.5 柱坐标散度算子（完整展开）

对任意向量场 $\boldsymbol{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_z\hat{z}$：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

轴对称下：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{d(rA_r)}{dr}$$

## 4.6 柱坐标旋度算子（完整展开 · 行列式定义）

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\hat{r} & \hat{\theta} & \frac{1}{r}\hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

展开三个分量：

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

轴对称下（$\boldsymbol{E} = E_z \hat{z}$，$\boldsymbol{H} = H_\theta \hat{\theta}$）：

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_\theta = -\frac{dE_z}{dr}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_\theta)$$

## 4.7 柱坐标拉普拉斯算子（完整展开）

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

轴对称下：

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)$$

进一步展开：

$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}$$

# 4 第二步：柱坐标微分算子（只讲本文真正用到的）

## 4.1 为什么必须用柱坐标

导线是圆柱形，用柱坐标 $(r, \theta, z)$ 最自然。

## 4.2 轴对称条件再次强调

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

## 4.3 柱坐标标量拉普拉斯算子（全文最重要公式）

对于仅与 $r$ 有关的标量场 $\Phi(r)$：

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) \tag{11}$$

这一步用到：柱坐标下标量拉普拉斯定义 + 轴对称简化。本文所有方程最终都会归结为这一算子。

## 4.4 旋度的简化形式

对 $\boldsymbol{E} = E_z(r)\hat{\boldsymbol{z}}$：

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_\theta = -\frac{dE_z}{dr} \tag{12}$$

对 $\boldsymbol{H} = H_\theta(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$：

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\theta) \tag{13}$$

# 5 第三步：麦克斯韦方程组（良导体简化版）

## 5.1 麦克斯韦方程组原始微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{17}$$

## 5.2 本构关系（线性介质）

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{18}$$

## 5.3 良导体核心条件：$\sigma \gg \omega\varepsilon$

传导电流远大于位移电流：

$$|\sigma \boldsymbol{E}| \gg \left| \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right|$$

因此可忽略位移电流：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{J}$$

## 5.4 时谐场频域形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

最终简化为两组核心方程：

法拉第定律：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{19}$$

安培定律：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{20}$$

## 5.5 良导体内部无散场

良导体内部不存在净电荷：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{21}$$

# 6 第四步：推导电场扩散方程（无跳步）

## 6.1 目标

消去 $\boldsymbol{H}$，得到仅含 $\boldsymbol{E}$ 的方程。

## 6.2 对法拉第定律(19)两边取旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -j\omega\mu \nabla \times \boldsymbol{H}$$

**为什么取旋度？** 为了代入安培定律消去 $\boldsymbol{H}$。

## 6.3 代入安培定律(20)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -j\omega\mu\sigma \boldsymbol{E} \tag{22}$$

## 6.4 使用向量微积分恒等式

对任意光滑向量场 $\boldsymbol{E}$，恒有：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{23}$$

这是向量代数基本恒等式，相当于向量版的平方公式。

## 6.5 代入 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$（良导体内部无源）

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{24}$$

## 6.6 得到电场扩散方程

将(24)代入(22)：

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\sigma\, \boldsymbol{E}$$

两边乘以 $-1$：

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{E} = j\omega\mu\sigma\, \boldsymbol{E}} \tag{25}$$

这就是**电场扩散方程**（也称亥姆霍兹方程）。

# 7 第五步：柱坐标下写出分量方程

## 7.1 代入仅有的分量 $\boldsymbol{E} = E_z(r)\hat{\boldsymbol{z}}$

$$\nabla^2 E_z = j\omega\mu\sigma\, E_z \tag{26}$$

## 7.2 代入柱坐标拉普拉斯算子(11)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) = j\omega\mu\sigma\, E_z \tag{27}$$

## 7.3 整理为标准常微分方程形式

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) - j\omega\mu\sigma\, E_z = 0 \tag{28}$$

# 8　第六步：化为贝塞尔方程（逐行变换）

## 8.1　定义复波数 $k$

令

$$k^2 \equiv -j\omega\mu\sigma \tag{29}$$

**为什么这样定义？** 代入后右边变成 $-k^2 E_z$，移项可得到标准贝塞尔方程形式。

代入(27)：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) = -k^2 E_z$$

移项：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) + k^2 E_z = 0 \tag{30}$$

## 8.2　两边乘以 $r^2$

令 $y = E_z$：

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) + k^2 r^2 y = 0 \tag{31}$$

## 8.3　展开第一项

$$\begin{aligned} r\left(ry'' + y'\right) + k^2 r^2 y &= 0 \\ r^2 y'' + ry' + k^2 r^2 y &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

## 8.4　变量代换 $x = kr$

$$\frac{dy}{dr} = k\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dr^2} = k^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

代入(32)：

$$r^2\left(k^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) + r\left(k\frac{dy}{dx}\right) + k^2 r^2 y = 0$$

注意 $r^2 = \frac{x^2}{k^2}$，$r = \frac{x}{k}$，代入：

$$\frac{x^2}{k^2} \cdot k^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{k} \cdot k \frac{dy}{dx} + k^2 \cdot \frac{x^2}{k^2} y = 0$$

化简：

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \tag{33}$$

## 8.5 识别为标准贝塞尔方程

标准贝塞尔方程：

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$$

对比(33)可知：$n = 0$，即**零阶贝塞尔方程**。

# 9 第七步：贝塞尔方程从零求解（最详细版·不跳步）

## 9.1 解法思路：幂级数解法（和初中解多项式一样）

对于二阶线性常微分方程，我们假设解为**幂级数**：

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+s}$$

其中：

- $s$：指标（待定）
- $a_m$：系数（待定）
- $a_0 \neq 0$（首项系数不为0）

**为什么这样假设？** 很多微分方程的解都可以写成无穷级数，比如 $e^x$、$\sin x$、$\cos x$ 都是幂级数。

## 9.2 求一阶导数、二阶导数

一阶导数：

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+s)x^{m+s-1}$$

二阶导数：

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+s)(m+s-1)x^{m+s-2}$$

## 9.3 代入贝塞尔方程 $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

第一项 $x^2y''$：

$$x^2y'' = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+s)(m+s-1)x^{m+s}$$

第二项 $xy'$：

$$xy' = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+s) x^{m+s}$$

第三项 $x^2 y$：

$$x^2 y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+s+2}$$

### 9.4 合并前两项

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[(m+s)(m+s-1) + (m+s)\right] x^{m+s} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+s+2} = 0$$

化简括号内：

$$(m+s)(m+s-1) + (m+s) = (m+s)^2 - (m+s) + (m+s) = (m+s)^2$$

所以：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+s)^2 x^{m+s} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+s+2} = 0 \tag{34}$$

### 9.5 统一幂次（令第三项指标前移2位）

对第三项，令 $m' = m+2$，则 $m = m' - 2$：

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+s}$$

代入(34)：

$$a_0 s^2 x^s + a_1 (s+1)^2 x^{s+1} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[a_m (m+s)^2 + a_{m-2}\right] x^{m+s} = 0 \tag{35}$$

### 9.6 最低次项（$x^s$）给出指标方程

最低次幂为 $x^s$，对应 $m=0$：

$$a_0 s^2 = 0$$

因为 $a_0 \neq 0$，所以必须：

$$s = 0 \tag{36}$$

### 9.7 $x^{s+1}$ 项给出 $a_1$

代入 $s = 0$，$x^1$ 项：

$$a_1(0+1)^2 = a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \tag{37}$$

### 9.8 递推关系（$m \geq 2$）

对任意 $m \geq 2$，同次幂系数必须为0：

$$a_m m^2 + a_{m-2} = 0$$

得到递推公式：

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{m^2} \tag{38}$$

### 9.9 逐项求系数（最直观）

$a_0$：任意常数（由边界条件决定）

$a_1 = 0$

$m = 2$：$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{a_0}{4}$

$m = 3$：$a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0$

$m = 4$：$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = -\frac{-a_0/4}{16} = \frac{a_0}{64} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}$

$m = 5$：$a_5 = 0$

$m = 6$：$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0/64}{36} = -\frac{a_0}{2304} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$

## 9.10 写出级数解

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\right] \tag{39}$$

## 9.11 定义第一类0阶贝塞尔函数 $J_0(x)$

取 $a_0 = 1$，这个级数就是**第一类零阶贝塞尔函数**：

$$\boxed{J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}} \tag{40}$$

展开前几项：

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

性质：

- $J_0(0) = 1$
- 在 $x = 0$ 处有限、光滑

## 9.12 第二个线性无关解：诺伊曼函数 $Y_0(x)$

二阶方程必须有两个线性无关解。第二个解在 $x = 0$ 处发散（包含 $\ln x$ 项），称为**第二类零阶贝塞尔函数** $Y_0(x)$：

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \cdots \quad (x \to 0)$$

## 9.13 物理边界条件：中心有限

在导线中心 $r = 0$（即 $x = 0$）：

$$Y_0(0) \to -\infty$$

电场不可能无穷大，因此必须：

$$C_2 = 0$$

### 9.14 最终唯一物理解

$$y(x) = CJ_0(x)$$

回到原变量 $r$（$x = kr$）：

$$\boxed{E_z(r) = CJ_0(kr)} \tag{41}$$

## 第七步总结

我们一步一步证明了：

1. 贝塞尔方程用幂级数可解
2. 得到两个解：$J_0$ 和 $Y_0$
3. 中心有界条件要求扔掉 $Y_0$
4. 最终解只能是 $J_0(kr)$

# 10　第八步：边界条件确定常数 $C$

## 10.1　边界位置：导线表面 $r = a$

设表面电场为 $E_0$（由外部电源决定）：

$$E_z(a) = E_0 \tag{42}$$

## 10.2　代入解(41)

$$E_0 = C J_0(ka) \tag{43}$$

## 10.3　解出 $C$

$$C = \frac{E_0}{J_0(ka)} \tag{44}$$

## 10.4　最终电场分布

$$\boxed{E_z(r) = E_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}} \tag{45}$$

## 10.5　电流密度（欧姆定律直接得出）

由 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$：

$$J_z(r) = \sigma E_z(r) = \sigma E_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}$$

记表面电流密度 $J_s = \sigma E_0$：

$$\boxed{J_z(r) = J_s \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}} \tag{46}$$

# 11　第九步：趋肤深度 $\delta$ 完整推导

## 11.1　展开复波数 $k$

由(29)：$k^2 = -j\omega\mu\sigma$。写成极坐标形式：

$$-j = e^{-j\pi/2} \quad (\text{因为 } e^{-j\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j)$$

所以：

$$k = \sqrt{\omega\mu\sigma}\, e^{-j\pi/4}$$

而 $e^{-j\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$

因此：

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\,(1-j) \tag{47}$$

## 11.2　定义趋肤深度 $\delta$

令：

$$\boxed{\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}}} \tag{48}$$

则：

$$k = \frac{1-j}{\delta} \tag{49}$$

## 11.3　物理意义

- $\delta$ 称为**趋肤深度**，单位是米
- $\mathrm{Re}(k) = 1/\delta$：幅值衰减率
- $\mathrm{Im}(k) = -1/\delta$：相位变化率

## 11.4　高频近似：贝塞尔函数 $\rightarrow$ 指数衰减

当频率很高时，$\delta \ll a$（趋肤深度远小于导线半径）。此时 $|ka| \gg 1$，贝塞尔函数可以用渐近公式近似。

在表面附近，设 $d = a - r$ 为从表面向内的深度（$d \geq 0$，$d \ll a$），可以证明：

$$\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} \approx e^{-(1+j)d/\delta} \tag{50}$$

因此：

$$J_z(d) \approx J_s\, e^{-d/\delta}\, e^{-jd/\delta} \tag{51}$$

## 11.5　指数衰减的含义

**幅值衰减：**$|J_z(d)| \approx J_s e^{-d/\delta}$

- 当 $d = \delta$ 时，幅值衰减到表面的 $1/e \approx 36.8\%$
- 当 $d = 3\delta$ 时，衰减到 $e^{-3} \approx 5\%$
- 当 $d = 5\delta$ 时，衰减到 $e^{-5} \approx 0.67\%$

**相位滞后：**$\arg(J_z(d)) \approx -d/\delta$ 弧度

- 每深入 $\delta$，相位滞后1弧度（约57.3°）

## 11.6　趋肤深度的频率依赖关系

由(48)：

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}}$$

- 频率 $f$ 越高，$\delta$ 越小$\rightarrow$ 趋肤效应越显著
- 电导率 $\sigma$ 越高，$\delta$ 越小$\rightarrow$ 良导体趋肤效应更明显
- 磁导率 $\mu$ 越高，$\delta$ 越小$\rightarrow$ 铁磁材料趋肤效应极强

## 11.7　典型数值（铜，$\sigma = 5.8 \times 10^7\,\mathbf{S/m}$，$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathbf{H/m}$）

| 频率 $f$ | 趋肤深度 $\delta$ | 说明 |
|---|---|---|
| 50 Hz | 9.35 mm | 电力工频，大截面汇流排需考虑 |
| 1 kHz | 2.09 mm | 音频变压器 |
| 100 kHz | 0.209 mm | 开关电源变压器 |
| 1 MHz | 66.1 µm | 射频电路 |
| 100 MHz | 6.61 µm | 高频PCB走线 |
| 1 GHz | 2.09 µm | 微波频段 |
| 10 GHz | 0.66 µm | 雷达、卫星通信 |

# 12 第十步：全文完整总结

## 12.1 完整推导路径（一步未跳）

1. 经典电子运动→ 牛顿定律→ 微观欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$
2. 麦克斯韦方程组 + 良导体简化→ $\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H}$，$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E}$
3. 取旋度 + 向量恒等式→ 扩散方程 $\nabla^2\boldsymbol{E} = j\omega\mu\sigma\boldsymbol{E}$
4. 柱坐标 + 轴对称→ 零阶贝塞尔方程 $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
5. 幂级数解法→ 得到两个解 $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$
6. 中心有限条件→ 保留 $J_0$，舍去 $Y_0$
7. 表面边界条件→ 确定系数 $C = E_0/J_0(ka)$
8. 复波数分解→ 趋肤深度 $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$
9. 高频近似→ 指数衰减分布 $J_z(d) \approx J_s e^{-(1+j)d/\delta}$

## 12.2 核心物理本质

趋肤效应的根源是**法拉第电磁感应定律**：

1. 变化的电流（$\frac{dI}{dt} \neq 0$）产生变化的磁场（$\frac{dB}{dt} \neq 0$）
2. 变化的磁场在导体内部感应出电场（电动势）
3. 根据楞次定律，感应电场的方向总是**阻碍**原电流的变化

4. 导线中心的电流被外围电流产生的磁场所感应出的反向电动势抵消
5. 表面的电流受内部磁通影响较小，得以保持
6. 结果：电流被迫流向表面

## 12.3 最重要公式

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}}$$

$$\boxed{J_z(r) = J_s \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \quad k = \frac{1-j}{\delta}}$$

## 12.4 工程意义

| 应用领域 | 影响 | 应对措施 |
|---|---|---|
| 电力传输 (50/60 Hz) | 对大截面导线有影响 | 使用多股绝缘线（利兹线） |
| 射频电路 (MHz-GHz) | $\delta$ 很小（微米量级） | 使用空心导线、镀银表面 |
| 变压器设计 | 增加涡流损耗 | 使用硅钢片叠层（切断涡流路径） |
| 电感器 | 高频电阻增大 | 使用利兹线、磁芯材料 |
| 电磁屏蔽 | 高频电磁场穿透深度小 | 薄金属板即可有效屏蔽 |

## 推导逻辑链总览

| 步骤 | 内容 | 输出方程 |
|---|---|---|
| 1 | 微观欧姆定律 | $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ |
| 2 | 柱坐标向量算子 | 梯度、散度、旋度、拉普拉斯 |
| 3 | 良导体麦克斯韦方程组 | $\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}$, $\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E}$ |
| 4 | 电场扩散方程 | $\nabla^2 \boldsymbol{E} = j\omega\mu\sigma \boldsymbol{E}$ |
| 5 | 柱坐标分量方程 | $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dE_z}{dr}) = j\omega\mu\sigma E_z$ |
| 6 | 贝塞尔方程化简 | $\frac{d^2E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr} + k^2 E_z = 0$ |
| 7 | 幂级数法求解 | $E_z(r) = E_0 J_0(kr)/J_0(ka)$ |
| 8 | 电流密度推导 | $J_z(r) = J_s J_0(kr)/J_0(ka)$ |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 趋肤深度定义 | $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ |
| 10 | 结论 | 高频电流集中于表面，指数衰减 |

## 结束语

至此，我们从最基本的物理假设（自由电子气、牛顿定律、麦克斯韦方程组）出发，一步一步推导出了趋肤效应的完整数学描述。整个过程只需要：

- 微积分（求导、积分、泰勒级数/幂级数）
- 线性代数（向量、复数）
- 基本电磁学概念（电场、磁场、电流）

**不需要预先知道贝塞尔函数**——我们通过幂级数法现场“发明”了它。

# 13　第十一步: 高频电阻与角频率 $\omega$ 的关系 (完整无跳步)

## 13.1　总电流的定义

总电流是电流密度在导线横截面上的积分:

$$I = \int_0^a J_z(r) \cdot 2\pi r dr$$

## 13.2　代入 $J_z(r)$ 表达式

$$I = \int_0^a \left( J_s \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} \right) \cdot 2\pi r dr$$

$$I = \frac{2\pi J_s}{J_0(ka)} \int_0^a r J_0(kr) dr$$

## 13.3　贝塞尔函数积分公式

使用恒等式:

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x)$$

令 $t = kr$，则 $dt = kdr$，$r = t/k$:

$$\int_0^a r J_0(kr) dr = \frac{1}{k^2} \int_0^{ka} t J_0(t) dt = \frac{1}{k^2} \cdot ka J_1(ka) = \frac{a}{k} J_1(ka)$$

## 13.4　总电流最终式

$$I = \frac{2\pi J_s}{J_0(ka)} \cdot \frac{a}{k} J_1(ka)$$

$$I = \frac{2\pi a J_s}{k} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}$$

## 13.5　单位长度电压

导线单位长度电压等于表面电场:

$$U = E_0 = \frac{J_s}{\sigma}$$

## 13.6 单位长度阻抗

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{J_s/\sigma}{\frac{2\pi a J_s}{k} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}}$$

约去 $J_s$：

$$Z = \frac{k}{2\pi a\sigma} \cdot \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

## 13.7 高频近似 $ka \gg 1$

高频下：

$$\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \to 1$$

$$Z \approx \frac{k}{2\pi a\sigma}$$

## 13.8 代入 $k = (1-j)/\delta$

$$Z \approx \frac{1-j}{2\pi a\sigma\delta}$$

## 13.9 高频电阻（实部）

$$R = \frac{1}{2\pi a\sigma\delta}$$

## 13.10 代入趋肤深度 $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

$$R = \frac{1}{2\pi a\sigma}\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$R = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

## 13.11 电阻与角频率的直接关系式

$$\boxed{R(\omega) = \underbrace{\frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\mu}{2\sigma}}}_{\text{常数}} \cdot \sqrt{\omega}}$$

$$\boxed{R(\omega) = K\sqrt{\omega}}$$